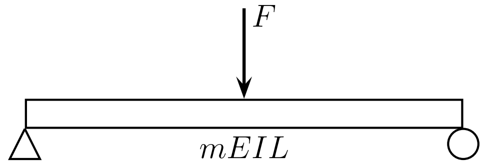
BALKBÖJNING – FRITT UPPLAGD BALK MED EGENVIKT OCH UTSATT FÖR EN PUNKTLAST MITT PÅ BALKEN

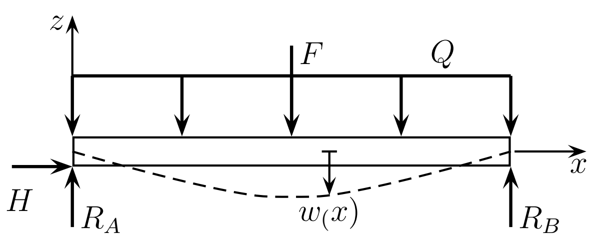
Daniel Leidermark



Egenvikten representeras som en utbreddlast Q:

$$Q = mg = \rho V g = \rho A L g \tag{1}$$

Friläggning ger:



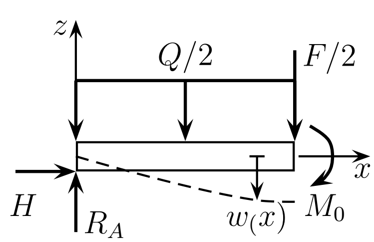
Global jämvikt ger:

$$R_A = R_B = \frac{F+Q}{2} \tag{2}$$

$$H = 0 \tag{3}$$

Elastiska linjens differentialekvation

Symmetri behöver nyttjas för att lösa deformationen utifrån elastiska linjens differentialekvation då balken utsätts för den diskreta punktlasten F. Balken snittas vid $x = L/2$ och snittstorheterna M_0 och T_0 förs in, pga symmetri är $T_0 = 0$ (så endast momentet förs in):



$$EIw^{IV}(x) = q(x) \tag{4}$$

$$q(x) = -\frac{Q}{L} = -\frac{mg}{L} = -\frac{\rho V g}{L} = -\rho A g \tag{5}$$

$$\Rightarrow w^{IV}(x) = -\frac{Q}{EIL} \tag{6}$$

Integration ger:

$$w^{III}(x) = -\frac{Q}{EIL}x + C_1 \tag{7}$$

$$w^{II}(x) = -\frac{Q}{EIL}\frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2 \tag{8}$$

$$w^{I}(x) = -\frac{Q}{EIL}\frac{x^3}{6} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 \tag{9}$$

$$w(x) = -\frac{Q}{EIL}\frac{x^4}{24} + C_1\frac{x^3}{6} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4 \tag{10}$$

Randvillkor:

$$x = 0 : \begin{cases} w(0) = 0 \\ M(0) = -EIw^{II}(0) = 0 \end{cases} \tag{11}$$

$$x = L/2 : \begin{cases} w^{I}(L/2) = 0 \\ M(L/2) = -EIw^{II}(L/2) = M_0 = -\frac{FL}{4} - \frac{QL}{8} \end{cases} \tag{12}$$

Ekv. (11-12) i Ekv. (7-10) ger:

$$\begin{cases} C_1 = \frac{F+Q}{2EI} \\ C_2 = 0 \\ C_3 = -\frac{FL^2}{16EI} - \frac{QL^2}{24EI} \\ C_4 = 0 \end{cases} \tag{13}$$

Vilket leder till deformationsuttrycket:

$$w(x) = -\frac{Q}{EIL}\frac{x^4}{24} + \frac{F+Q}{2EI}\frac{x^3}{6} - \frac{FL^2}{16EI}x - \frac{QL^2}{24EI}x \tag{14}$$

Maximal deformation:

$$w^{I}(x) = 0 \Rightarrow -\frac{Q}{EIL}\frac{x^3}{6} + \frac{F+Q}{2EI}\frac{x^2}{2} - \frac{FL^2}{16EI} - \frac{QL^2}{24EI} = 0 \tag{15}$$

Vilket ger:

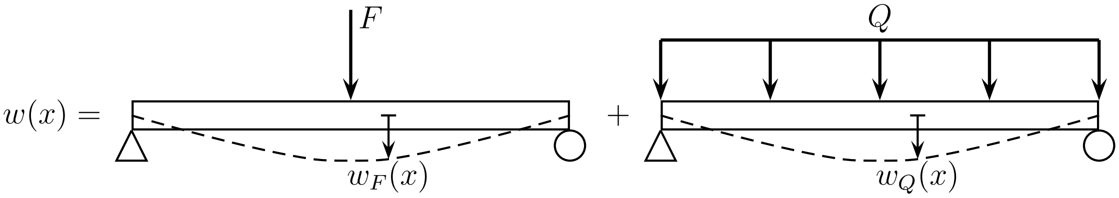
$$\begin{cases} x = -0.427L \\ x = \frac{L}{2} \\ x = 2.927L \end{cases} \tag{16}$$

varav endast $x = \frac{L}{2}$ är giltig $(\text{balk} \in [0 \leq x \leq L])$, där den maximala deformation blir:

$$w(L/2) = -\frac{8F+5Q}{384EI}L^3 \tag{17}$$

Elementarfall

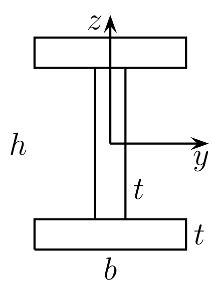
Superponera ihop fritt upplagd balk utsatt för punktlast med fritt upplagd balk utsatt för utbreddlast (egenvikt).

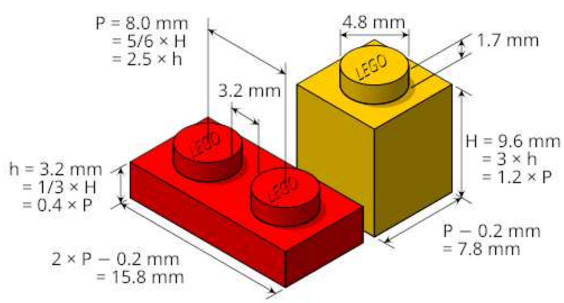


$$w(L/2) = w_F(L/2) + w_Q(L/2) = \frac{FL^3}{3EI}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{384}\frac{QL^3}{EI} = \frac{8F+5Q}{384EI}L^3 \tag{18}$$

Deformation - numeriska värden

Materialdata för ABS-plast: $\rho = 1,07 \cdot 10^{-6}$kg/mm^3 och $E = 2400$MPa.
Tunnväggig idealiserad I-profil används för enkelhetsskull som tvärsnitt (homogent solitt och utan snots):





Geometri: $L = 12 \cdot 7.8 = 93.6$mm, $h = b + t = 19$mm, $b = 15.8$mm och $t = 3.2$mm.
Vilket ger:

$$A = 2bt + (h-t)t = 151.68\text{mm}^2 \tag{19}$$

$$V = AL = 14197.248\text{mm}^3 \tag{20}$$

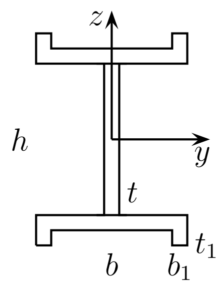
$$Q = \rho V g = 0.149\text{N} \tag{21}$$

$$I = \frac{th^3}{12} + \frac{tbh^2}{2} = 10955.147\text{mm}^4 \tag{22}$$

En punktlast på 1kg ger $F = mg = 1 \cdot 9.81 = 9.81$N. Vilket leder till den maximala nedböjningen (deformationen), enligt Ekv. (18), på:

$$w(L/2) = \frac{8 \cdot 9.81 + 5 \cdot 0.149}{384 \cdot 2400 \cdot 10955.147} 93.6^3 = 0.00643\text{mm} \tag{23}$$

Om vi istället räknar konservativt, vi väljer det vekaste tvärsnittet i hela Lego-plattan och förenklar lite gällande livet på balken:



Geometri: $L = 12 \cdot 7.8 = 93.6$mm, $h = b + t = 17.3$mm, $b = 15.8$mm, $b_1 = 1.5$mm, $t_1 = 1.7$mm och $t = 3.2 - t_1 = 1.5$mm.
Vilket ger:

$$A = 2bt + (h - t)t + 4 \cdot b_1 t_1 = 81.3\text{mm}^2 \tag{24}$$

$$V = AL = 7609.68\text{mm}^3 \tag{25}$$

$$Q = \rho V g = 0.0799\text{N} \tag{26}$$

$$I = \frac{th^3}{12} + \frac{tbh^2}{2} + 4 \cdot \left(\frac{b_1 t_1^3}{12} + b_1 t_1 \left(\frac{b}{2} + t + \frac{t_1}{2} \right)^2 \right) = 5267.895\text{mm}^4 \tag{27}$$

Vilket leder till den maximala nedböjningen (deformationen), enligt Ekv. (18), på:

$$w(L/2) = \frac{8 \cdot 9.81 + 5 \cdot 0.0799}{384 \cdot 2400 \cdot 5267.895} 93.6^3 = 0.0133\text{mm} \tag{28}$$

Vilket ger en faktor ~ 2 i nedböjning gentemot det styvare tvärsnittet använt i Ekv. (23).